

Βάση ορθογωνίων πολυωνύμων:

Έστω $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ μία βάση ορθογωνίων πολυωνύμων στον P_n .
Από τη χαρακτηριστική σχέση $(q^*, p) = (f, p)$, $\forall p \in P_n$
Θετουμε $q^*(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \dots + \lambda_n p_n(x)$ γραμμ. συν. των
πολυωνύμων της βάσης, και επιλέγουμε ως $p(x) = p_i(x)$, $i=0, 1, \dots, n$
Τότε, $(q^*, p) = (f, p) \Leftrightarrow (\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n, p_i) = (f, p_i) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lambda_0 (p_0, p_i) + \dots + \lambda_n (p_n, p_i) = (f, p_i) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lambda_i (p_i, p_i) = (f, p_i) \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{(f, p_i)}{(p_i, p_i)}, \quad \forall i=0, 1, \dots, n$

Αιτία προκύπτει ένα διαγώνιο σύστημα πολύ καλής
κατάστασης. (μικρά σφάλματα πράξης του υπολογιστή
επιφέρουν μικρά σφάλματα στο αποτέλεσμα)

Εύρεση βάσης ορθογωνίων πολυωνύμων: (Gram-Schmidt)

Θετουμε βάση γραμμ. ανεξ. πολυωνύμων στον P_n (έστω των
απλοώτερη) βάση των μονονύμων $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Πούρνουμε
ως $p_0 = 1$. Τώρα, θεωρούμε το στοιχείο x^1 ως γραμμ. συν.
των ορθογωνίων βάσεων που θέλουμε να κατασκευάσουμε

$$x^i = c_0 p_0 + c_1 p_1 + \dots + c_i p_i \quad (*)$$

Εστω ότι κατασκευάσαμε τη βάση της των όρο p_{i-1} και θα κατασκευάσουμε των p_i (επαγωγικά)

Παίρνουμε εσωτερικά γινόμενα του (*) με τα p_j

$$\forall j = 0, 1, \dots, i-1 \text{ έχουμε } (x^i, p_j) = c_0(p_0, p_j) + \dots + c_i(p_i, p_j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^i, p_j) = c_j(p_j, p_j) \Leftrightarrow c_j = \frac{(x^i, p_j)}{(p_j, p_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, i-1$$

$$c_i p_i(x) = x^i - \frac{(x^i, p_0)}{(p_0, p_0)} p_0(x) - \frac{(x^i, p_1)}{(p_1, p_1)} p_1(x) - \dots - \frac{(x^i, p_{i-1})}{(p_{i-1}, p_{i-1})} p_{i-1}(x)$$

Επειδή μια ορθογώνια βάση είναι ανεξάρτητη από σταθερούς παράγοντες, θεωρούμε $c_i = 1$, επομένως

$$p_i(x) = x^i - \frac{(x^i, p_0)}{(p_0, p_0)} p_0(x) - \frac{(x^i, p_1)}{(p_1, p_1)} p_1(x) - \dots - \frac{(x^i, p_{i-1})}{(p_{i-1}, p_{i-1})} p_{i-1}(x)$$

Για μια βάση ορθογώνια στο $[-1, 1]$

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - \frac{(x, p_0)}{(p_0, p_0)} p_0(x) = x - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} = x$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 - \frac{(x^2, p_0)}{(p_0, p_0)} p_0(x) - \frac{(x^2, p_1)}{(p_1, p_1)} p_1(x) = \\ &= x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} x = x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} = \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{(x^3, p_0)}{(p_0, p_0)} p_0(x) - \frac{(x^3, p_1)}{(p_1, p_1)} p_1(x) - \frac{(x^3, p_2)}{(p_2, p_2)} p_2(x) = \dots = x^3 - \frac{3}{5}x$$

Άσκηση 4

Να βρούμε η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in [0, 1] \end{cases} \text{ ορισμένη στο } [-1, 1], \text{ στον } P_2 \text{ (μεσω ορθογώνιων πολυωνύμων)}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} q^*(x) &= \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x), \text{ όπου } \lambda_0 = \frac{(f, p_0)}{(p_0, p_0)} = \\ &= \frac{\int_{-1}^1 f(x) dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{2 \int_0^1 f(x) dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{2 \cdot \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} \frac{(q_1 r) \cdot (p_1 r)}{(p_1, p_1)} = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{(f, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{(q_2 r) \cdot (p_2 r)}{(p_2, p_2)} = \frac{2 \int_0^1 (1-x)(x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_0^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \dots = -\frac{15}{16}$$

$$\text{Ετσι, } q_2^*(x) = \frac{1}{2} - \frac{15}{16} (x^2 - \frac{1}{3}) = -\frac{15}{16} x^2 + \frac{15}{16}$$

Με τη μέθοδο Gram-Schmidt ορθογώνισιμον δύσκολο είναι να-
ποια σφάλματα όταν το n είναι σχετικά μεγάλο και αυτό
δίνει για να βρούμε τα p_i να είναι χρονο δυν των
προηγούμενων πολυωνύμων.

Ορθογώνισιμον με αναδρομική σχέση τριών όρων

Έστω ότι έχουμε το διάστημα $[-1, 1]$, παίρνουμε $p_0(x) = 1$
και $p_1(x) = x$ επειδή προκύπτει από την Gram-Schmidt
θεωρούμε λοιπόν την αναδρομική σχέση:

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x)$$

Έστω ότι το σύνολο $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ είναι ορθογώνιο
μετασχηματισμός και θα υπολογίσουμε τα α_k και β_k
ώστε και το p_{k+1} να 'ναι ορθογώνιο προς όλα τα άλλα
θα απαιτήσουμε $(p_{k+1}, p_j) = 0, \forall j = 0, 1, \dots, k$ και διακρίνουμε
τρεις αμοιβαίες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad j < k+1, \text{ τότε } (p_{k+1}, p_j) &= ((x - \alpha_k) p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), p_j) = \\ &= ((x - \alpha_k) p_k(x), p_j) - (\beta_k p_{k-1}(x), p_j) = \\ &= (x p_k(x), p_j) - \alpha_k (p_k(x), p_j) - \beta_k (p_{k-1}(x), p_j) = \\ &= (x p_k(x), p_j) - \alpha_k (p_k(x), p_j) - \beta_k (p_{k-1}(x), p_j) = \\ &= (p_k(x), x p_j) \stackrel{j < k+1}{=} (p_k, c_0 p_0 + c_1 p_1 + \dots + c_{j+1} p_{j+1}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad j = k, \text{ τότε } (p_{k+1}, p_k) &= ((x - \alpha_k) p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), p_k(x)) = \\ &= (x p_k(x), p_k(x)) - \alpha_k (p_k(x), p_k(x)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_k (p_k, p_k) = (x p_k, p_k) \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{(x p_k, p_k)}{(p_k, p_k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad j = k-1, \text{ τότε } (p_{k+1}, p_{k-1}) &= (x p_k, p_{k-1}) - \alpha_k (p_k, p_{k-1}) - \beta_k (p_{k-1}, p_{k-1}) = \\ &= 0 \Leftrightarrow \beta_k (p_{k-1}, p_{k-1}) = (x p_k, p_{k-1}) \Leftrightarrow \beta_k = \frac{(x p_k, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} \\ &\Leftrightarrow \beta_k = \frac{(p_k, p_k)}{(p_{k-1}, p_{k-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad (x P_k, P_{k-1}) &= (P_k, x P_{k-1}) = (P_k, c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_k P_k) = \\
 &= c_0 (P_k, P_0) + c_1 (P_k, P_1) + \dots + c_k (P_k, P_k) = \\
 &= c_k (P_k, P_k)
 \end{aligned}$$

από των αναδρομικών σχέσεων και $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ προκύπτει ότι ο συντελεστής μεγ. όρου των $P_k(x)$ είναι 1 άρα $c_k=1$ και συνεπώς

$$(x P_k, P_{k-1}) = c_k (P_k, P_k) = (P_k, P_k)$$

Ετσι, βρίσκουμε σχέσεις για το a_k, b_k και επόμενες βρίσκουμε μια μέθοδο με το αν έχουμε δύο όρους μπορούμε να βρούμε τον τρίτο δίχως την χρήση όλων των προηγούμενων.

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x \quad \text{και} \quad P_{k+1}(x) = x P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x)$$

$$\text{όπου} \quad \beta_k = \frac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}, \quad \text{στο} \quad [-1, 1]$$

$$\beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{1}{3}$$

$$P_2(x) = x P_1(x) - \frac{1}{3} P_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\beta_2 = \frac{(P_2, P_2)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{8/45}{2/3} = \frac{4}{15}$$

$$P_3(x) = x P_2(x) - \frac{4}{15} P_1(x) = x(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{15} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Άσκηση 7

Να βρεθεί η προσέγγιση ελάχ. τετραγ. της $f(x) = \sqrt{|x|^3}$ ορισμένης στο $[-1, 1]$ στον P_2

μετ

$$(f, p_0) = \int_{-1}^1 \sqrt{|x|^3} dx = 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = 2 \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$(p_0, p_0) = \int_{-1}^1 1 dx = 2, \quad \lambda_0 = \frac{(f, p_0)}{(p_0, p_0)} = \frac{4/5}{2} = \frac{2}{5}$$

$$(f, p_1) = 0, \quad \lambda_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = 0$$

$$(f, p_2) = \int_{-1}^1 \sqrt{|x|^3} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 2 \int_0^1 \left(x^{7/2} - \frac{1}{3} x^{3/2}\right) dx = \frac{8}{45}$$

$$(p_2, p_2) = \frac{8}{45}, \quad \lambda_2 = \frac{(f, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{8/45}{8/45} = 1$$

$$\lambda_2, \quad \phi_2^* = \frac{2}{5} + 1 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^2 + \frac{1}{15}$$

Πολυώνια Legendre:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x):$$

ορθώνια στο διάστημα $[-1, 1]$

Ετσι, προκύπτει ότι:

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x = \frac{5}{2} \left(x^3 - \frac{3}{5} x\right)$$

Παρατηρούμε ότι η μικρή διαφορά πολυωνύμων Legendre και ορθώνιων πολυωνύμων με τον κλάδο Gram-Schmidt είναι ως προς το σταθερό παράγοντα

Άσκηση 3

Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχ. τετραγώνων της $f(x) = x^3$ ορισμένης στο $[0, 1]$ στον P_2 με ορθογ. πολυώνια με αναδρομική σχέση.

Λύση

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} = x - \frac{1}{2}$$

Οπότε βρούμε το P_2 μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$\alpha = \frac{(x P_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_0^1 x (x - \frac{1}{2})^2 dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = \frac{(p_1, p_1)}{(p_0, p_0)} = \frac{1}{12}, \quad p_2(x) = (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{12} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

etc., or calculate them up diagonally below

$$(f, p_0) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{4}$$

$$(f, p_1) = \int_0^1 x^3 (x - \frac{1}{2}) dx = \frac{3}{40}$$

$$(p_1, p_1) = \frac{1}{12}, \quad \lambda_2 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{3/40}{1/12} = \frac{9}{10}$$

$$(f, p_2) = \int_0^1 x^3 (x^2 - x + \frac{1}{6}) dx = \frac{1}{120}$$

$$(p_2, p_2) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx = \frac{1}{180}$$

$$\lambda_2 = \frac{(f, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{1/120}{1/180} = \frac{3}{2}$$

$$q_2^* = \frac{1}{2} + \frac{9}{10} (x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2} (x^2 - x + \frac{1}{6})$$